$$4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$$

Zu dieser Integrandfunktion findet man nur durch eine raffinierte Substitution eine Stammfunktion. Die Idee dazu wirst Du in der Schule gelernt haben: Man benutzt, dass sin² x + cos² x = 1 gilt.

Das bedeutet: sin² x = 1 – cos² x. Stände oben in der Wurzel also statt 4 – x² der Term 4 – 4 cos² x = 4 (1 – cos² x) = 4 sin² x, dann könnte man die Wurzel ziehen. Das Ergebnis wäre dann 2 cos x

Genau das können wir aber haben, wenn wir x durch 2 cos z ersetzen.
Also:

$$x = 2\cos t$$
$$dx = -2\sin t\,dt$$
$$x^2 = 4\cos^2 t$$

Auch die Umkehrfunktion der Ersetzungsfunktion benötigen wir noch. Sie lautet:

$$t = f^{-1}(x) = arc\cos\frac{x}{2}$$

Mit Hilfe der Umkehrfunktion werden die Grenzen des Integrals nach der Substitution neu berechnet.
Man erhält

$$f^{-1}(0) = arc\cos\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$
$$f^{-1}(1) = arc\cos\left(\frac{2}{2}\right) = arc\cos(1) = 0$$

Somit gilt:

$$4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 2\sin t\cdot(-2)\sin t\,dt = -16\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt$$

In Deiner 2. Rechnungszeile fehlte hinter dem Integral also ein Faktor 2.
..0
4 S sin(t)(-2sin(t))dt
..Pi/2
Daher konntest Du nicht auf den Faktor 16 vor dem Integral kommen. Dass man einen konstanten Faktor vor das Integral ziehen darf, weißt Du doch sicher.