Die Substitutionsregel lautet allgemein so:
Sei *I* ein reelles Intervall , f: I → R eine stetige Funktion und ϕ :[a, b] → I stetig differenzierbar.
Dann gilt $\int_a^b f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$.

Der Funktionsterm von f(x) ist in unserem Fall $\sqrt{4-x^2}$. Entsprechend interpretiert man $\phi(a)=0, \phi(b)=2$.

Nun kommt die Substitution. Man ersetzt x durch $\phi(t)$, d.h. in unserem Fall x durch 2 cos (t).

Rein formal muss man dann dx durch $\phi'(t)dt$ ersetzen. Das ist also die Ableitung von 2 cos(t) „multipliziert“ mit dt. So entsteht der Term -2 sin(t) dt.

Wie Du an der Substitutionsgleichung oben siehst, muss dieser Term tatsächlich noch mit $f(\phi(t))=\sqrt{4-4\cos^2(t)}=\sqrt{4\sin^2(t)}=2\sin(t)$ multipliziert werden.

Die Gleichung oben macht auch klar, woher die Umkehrfunktionsterme kommen. Wenn $\phi(a)=2\cos(a)=0$ ist, dann muss umgekehrt z.B. $\cos(a)=\frac{0}{2}=0, a=arc\cos(0)=\frac{\pi}{2}$ sein.