3.1 Man untersuche das Konvergenzverhalten und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert der Folge (a_n).

$$\text{a)} \quad a_n = \frac{n^3}{\binom{2n}{n}}, \quad \text{b)} \quad a_n = \prod_{\nu=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right),$$

3.2 Man berechne im Konvergenzfall den Grenzwert der Folge (a_n) :

$$\text{a)}\ a_n = \frac{x^n - n}{x^n + n}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \qquad \text{b)}\ a_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

3.3 Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge und $A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$ das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.

a) Man zeige, daß aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt $\lim_{n\to\infty} A(a_1, \ldots, a_n) = a$.

b) Man gebe eine divergente Folge an, für welche die zugehörige Folge der arithmetischen Mittel konvergiert. Ferner gebe man eine beschränkte divergente Folge an, für die die Folge der arithmetischen Mittel ebenfalls divergiert.

3.4 Man gebe Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \to \infty$ und $b_n \to 0$ an, so daß gilt:

a) $a_n b_n \to c$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben ist.

b) Die Folge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, konvergiert aber nicht.

3.5 Man zeige: Für $0 \leq a \leq b \leq c$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$. Man formuliere und beweise den entsprechenden Sachverhalt für p Zahlen $a_1, \ldots, a_p \geq 0$.