Beispiel: Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

ist divergent.

Es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{m-n+1}{m} \to 1 \quad (m \to \infty)$$

Damit ist das Cauchy–Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \; : \; m, n \geq N \; : \; \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \to 0$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt.

Beispiel: Die **alternierende harmonische Reihe** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{1}{k+1} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent.

Dies zeigt man mit Hilfe des Leibnizschen Kriteriums:

Alternierende Reihen der Form $\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, für die $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge bilden, sind konvergent.

Der Grenzwert lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln 2 = 0.69314\ \ldots$$

Definition: Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent. Es gilt

$$a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

und daher ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k+1}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

gerade die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert.

Satz: **(Kriterien für absolute Konvergenz)**

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)_{n\geq 0}$ beschränkt

2) **Majorantenkriterium**

$$|a_k| \leq b_k \ \wedge \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

3) **Quotientenkriterium** Sei $a_k \neq 0$ $(\forall\, k \geq k_0)$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

4) **Wurzelkriterium**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall\, k \geq k_0) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$$

Beweis:

zu a): Die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

zu b): Da $|a_k| \leq b_k$ für alle k gilt, ist $b_k \geq 0$. Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ ist nach Voraussetzung konvergent, wegen $b_k \geq 0$ aber auch absolut konvergent. Nach Teil a) ist die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right)$ damit beschränkt. Aus

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

folgt dann, dass ebenfalls die Folge $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|\right)$ beschränkt und nach Teil a) absolut konvergent ist.

Beweis: (Fortsetzung)

zu c): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ ($\forall\, k \geq k_0$) folgt mit vollständiger Induktion direkt

$$|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}|$$

und somit für alle n

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |a_k| &\leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}|\frac{1}{1-q}}_{\text{Beschränktheitskonstante}} \end{aligned}$$

Nach Teil a) ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beweis: (Fortsetzung)

zu d): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \le q$ $(k \ge k_0)$ folgt direkt $|a_k| \le q^k$ für alle $k \ge k_0$. Wie in Teil c) folgt daraus

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \le \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{q^{k_0}}{1-q} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{absolut konvergent}$$

Bemerkung:

a) Das Quotienten– bzw. Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

b) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$$

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Die Reihe ist also (absolut) konvergent.

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \qquad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r} \ &\leq \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &< \ 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

Damit ist die Reihe (absolut) konvergent.

Einige Grenzwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1}\,k!}{z^k\,(k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \quad \rightarrow \quad 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe.

Insbesondere gilt für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad = \quad \exp(z)$$

Umordnungssatz für Reihen

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf $\mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \to \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \qquad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Beispiel auf Folie

Satz:

1) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede umgeordnete Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$

2) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ für jede Permutation $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ konvergent, so ist die Ausgangsreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Produkt von Reihen

Ausmultiplizieren von Reihen möglich?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=l=0}^{\infty} a_k b_l$$

Rechte Seite: jedes Indexpaar $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tritt genau einmal auf

Satz: Die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{l=0}^{\infty} b_l$ seien absolut konvergent.

Dann ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ für jede Numerierung der Indexpaare $(\sigma, \mu) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^2$ (Bijektion) absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ lässt sich N hinreichend groß wählen, so dass

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{\sigma_k} b_{\mu_k}| \leq \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} |a_k|\,|b_l| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

gilt.

Damit ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ absolut konvergent, ihr Grenzwert ist daher nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation (σ, μ).

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

	0	1	2	3	...	(σ_k)
0	0	3	8	15	...	
1	1	2	7	14	...	
2	4	5	6	13	...	
3	9	10	11	12	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
(μ_k)						

Spezielle Reihenfolge:

	0	1	2	3	...	(σ_k)
0	0	3	8	15	...	
1	1	2	7	14	...	
2	4	5	6	13	...	
3	9	10	11	12	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
(μ_k)						

Für $m = (n+1)^2 - 1$ ergibt sich dann

$$\sum_{k=0}^{m} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)(b_0 + b_1 + \ldots + b_n)$$

und daher für $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right)$$

Weiterer Spezialfall: Numerierung entlang der Diagonalen

	0	1	2	3	...	(σ_k)
0	0	2	5	9	...	...
1	1	4	8	13	...	
2	3	7	12	18	...	
3	6	11	17	24	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
(μ_k)						

Man erhält damit das **Cauchy–Produkt der Reihen**:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots\end{aligned}$$

Anwendung zum Cauchy–Produkt: Für die durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad (z \in \mathbb{Z})$$

definierte **Exponentialfunktion** gilt die **Funktionalgleichung**

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

Begründung: Die obige Reihe ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{w^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)\end{aligned}$$