1. Betrachten Sie den reellen Vektorraum P_3 der Polynome von höchstens 3. Grad.

   a) V_1 sei Untervektorraum von P_3 und $V_1 = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ mit

   $f_1(x) = -x^3 + 2x,$ $\qquad$ $f_2(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 1,$

   $f_3(x) = -x^3 - 18x^2 + 17x - 3,$ $\qquad$ $f_4(x) = -4x^3 + 6x^2 + 3x + 1$

   Untersuchen Sie, ob f_1, f_2, f_3, f_4 linear abhängig oder unabhängig sind.

   Geben Sie die Dimension von V_1 an.

   b) Sei $F: \begin{cases} P_3 \to P_3 \\ f \to g \end{cases}$ und $\begin{Bmatrix} f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ g(x) = 3ax^2 + 2bx + c \end{Bmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$

   Zeigen Sie, dass für alle f_i, f_j, $f \in P_3$ und $k \in \mathbb{R}$ gilt

   1. $F(f_i + f_j) = F(f_i) + F(f_j)$

   2. $F(z \cdot f) = z \cdot F(f)$

   c) Sei $f \in P_3$ durch $F(f) = g^*$ mit $g^*(x) = 6x^2 - 4x+3$ (mit F aus Aufgabenteil b)!) bestimmt.

   Untersuchen Sie, ob die so definierte Menge V_2 von Polynomen einen Untervektorraum von P_3 bildet, also $V_2 = \{f \in P_3 \mid F(f) = g^*\}$.

(Bitte wenden!)

2\. a) Zeigen Sie, dass $U = \{(x_1;x_2;x_3) \mid x_1+2x_2+3x_3 = 0\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^3$ ist und die Vektoren $\vec{b_1} = (-2;1;0)$ und $\vec{b_2} = (-3;0;1)$ eine Basis von U bilden.

(Bitte beachten Sie: Streng genommen müssten wir eigentlich die Vektoren als Spaltenvektoren oder aber als $\vec{b_1} = (-2;1;0)^T$ schreiben (vgl. Kap. 2.1.5). Der Übersichtlichkeit zuliebe ziehen wir hier die „einfachste" Schreibweise vor.)

Fassen wir den $\mathbb{R}^3$ als geometrischen Vektorraum auf, wird U zu einer Ebene E_1 (die den Nullpunkt enthält). Notieren Sie eine Gleichung von E_1.

b) Betrachten Sie die drei Punkte $P = (1;1;1)$, $Q = (3;q_2;q_3)$ und $R = (2;5;r_3)$.

Die fehlenden Komponenten q_2, q_3 und r_3 sollen nun so gewählt werden, dass die Vektoren $\vec{PQ}$ und $\vec{PR}$ linear abhängig sind und zugleich in E_1 (bzw. U) liegen.

Warum liegen die drei Punkte P, Q und R auf einer Geraden g_1? Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an und untersuchen Sie deren Lage zur Ebene E_1.

Die drei Punkte $A = (0;0;0)$, $B = (1;4;-3)$ und $C = (-1;2;3)$ sind die Eckpunkte des Dreiecks ABC. Dieses Dreieck liegt in der Ebene E_2. Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.

Zeigen Sie, dass sich die Ebenen E_1 und E_2 in einer Geraden g_2 schneiden und stellen Sie eine Geradengleichung zu g_2 auf. Wie verhalten sich die Geraden g_1 und g_2 zueinander?

Die Dreiecksseite CB liegt auf der Geraden g_3. Geben Sie auch für diese Gerade eine Gleichung an und untersuchen Sie deren Verhältnis zu g_1.