Aufgaben Kapitel 3

A3.1.1: Wie hängt die Temperatur in °C von der Temperatur in °Fahrenheit ab?

A3.1.2: Notieren Sie die Kosten für einer Massenware als Funktion. x sei dabei die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten der Ware, K seien die Fixkosten und k die variablen Kosten pro Mengeneinheit.

A3.1.3: Charakterisieren Sie die Spiegelung an einer Geraden durch definierende Eigenschaften.

A3.1.4: Lösen Sie graphisch die Ungleichung $|x + 3| \leq |x - 1|$. Zeichnen Sie dazu die Graphen der Funktionen f und g, definiert durch $f(x) = |x + 3|$ und $g(x) = |x - 1|$.

A3.1.5: Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := [x + 0,5]$ eigent sich für eine bestimmte Art der Rundung. Welche?

A3.1.6: Bestimmen Sie für $f(x) = 2\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$ und $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ f+g, f–g , f·g und f/g. Zeichen Sie jeweils den Graph.

A3.1.7: Die Temperatur (in °F) in einer Stadt an einem bestimmten Tag ist gegeben durch $f(t) = -0,66 \cdot t^2 + 3,16 \cdot t + 78,9$. Dabei ist t die Zeit in Stunden und t = 0 entspricht Mittag 12^{00}.

(a) Rechnen Sie die Temperatur auf die Zeitskala um, bei der t = 0 Mitternacht entspricht.

(b) Rechnen Sie die Temperatur in °C um.

Hinweis: in beiden Teilaufgaben handelt es sich um Verkettungen von Funktionen. Machen Sie sich das klar.

A3.1.8: Untersuchen Sie, in welchen Intervallen die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$ monoton wächst bzw. monoton fällt.

A3.1.9: Bestimmen Sie alle lokalen und absoluten Extremwerte der Funktion

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

(b) $f: [0, \infty[\to]0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

A3.1.10: Untersuchen Sie, ob $f: [0, \infty[\to [0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ injektiv bzw. surjektiv ist.

A3.1.11: Bestimmen Sie die Umkehrfunktion und zeichnen Sie den Graph der Funktion und der Umkehrfunktion in ein und dasselbe Diagramm.

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

(b) $f: [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cdot x + b$ mit $a \neq 0$

(e) $f: [0, \infty[\to]0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

A3.1.12: Geben Sie zu allen Permutationen von {1, 2, 3} die jeweilige Umkehrabbildung an.

A3.2.1: Sei $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x^2 + 10x - 6$, $g(x) = x^5 + 3x^3 + 6x^2 + 2x + 7$.

Bilden Sie $f + f$, $f - g$, $f \cdot g$ und bestimmen Sie jeweils den Grad der Polynome

A3.2.2

(a) Stellen Sie 765 im Binärsystem und im Hexadezimalsystem dar

(b) Welches ist die größte n-stellige Zahl im Binärsystem?

A3.2.3: Führen Sie die Division f:g durch für $f(x) = x^5 + 3x^3 + 6x^2 + 2x + 7$ und

$g(x) = 4x^3 - 2x^2 + 10x - 6$. Bestimmen Sie damit die Polynome q und r in der Zerlegung

$f = q \cdot g + r$.

A3.2.4: Berechnen Sie mit Hilfe der Division durch $(x - a)$ den Funktionswert von

$f(x) = x^5 + 3x^3 + 6x^2 + 2x + 7$ an der Stelle $x = 3$.

A3.2.5:

(a) Wandeln Sie vom Binär- in das Dezimalsystem um: 11011110101

(b) Wandeln Sie vom Dezimal- und das Binärsystem um: 23456

(c) Wie sieht der Umwandlungsalgorithmus aus für die Umwandlung in ein beliebiges p-System?

A3.2.6: Programmieren Sie den allgemeinen Umwandlungsalgorithmus vom Dezimalsystem in das p-System.

A3.2.7: Finden Sie die Nullstellen und zerlegen Sie in Linearfaktoren:

$$f(x) = x^7 - 4x^6 - 36x^5 + 18x^4 + 447x^3 + 1002x^2 + 884x + 280$$

A3.2.8: Bestimmen Sie Definitionsbereich, Lücken, Polstellen, Asymptote von

(a) $f(x) = \dfrac{2x^8 - 11x^7 + 21x^6 - 17x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 4x^2}{x^6 - x^5 - 8x^4 + 11x^3 + x^2 + 8x - 12}$.

*(b) $f(x) = \dfrac{4970x - 4923}{4970x^2 - 9799x + 4830}$. Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

A3.2.9: Berechnen Sie sämtliche Nullstellen von

(a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$

(b) $g(x) = -2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 4x + 3$

A3.3.1: Füllen Sie folgende Wertetabelle aus ("n.d." für "nicht definiert"). Geben Sie dabei die genauen Werte an, nicht die, die der Taschenrechner mit Dezimalstellen erzeugt.

α in °	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
sin													
cos													
tan													
cot													

A3.3.2:

(a) Bestimmen Sie die Periode der Funktionen tan und cot.

(b) Warum ist die Funktion $f(x) := x - [x]$ periodisch? Welches ist die Periode?

A3.3.3: Zeichen Sie den Graph der Funktionen tan und cot.

A3.3.4: Folgern Sie aus den Additionstheoremen von sin und cos Additionstheoreme für tan und cot.

A3.3.5: Prüfen Sie: Die Funktion $f(x) = 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x^4$ ist gerade, die Funktion $g(x) = 2 \cdot x + 5 \cdot x^3 - x^5$ ist ungerade. Welche Polynomfunktionen sind gerade, welche ungerade?

A3.3.6: Leiten Sie Formel $\sin x = \dfrac{\tan x}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ ab und geben Sie an, in welchem Bereich welches Vorzeichen im Nenner richtig ist.

A3.3.7: Lösen Sie die Gleichung $\sin(x + 1/3) = 0{,}2$ für $x \in [0, 10 \cdot \pi]$

A3.3.8: Zeichnen Sie den Graph von arccos.

A3.3.9: cot: $]0, \pi[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt arccot. Zeichnen Sie den Graph dieser Funktion.

A3.3.10: Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x)$ an.

A3.3.11: Für eine harmonische Schwingung f(t) sind Amplitude A, Kreisfrequenz ω und Nullphasenwinkel φ aus folgenden Daten zu bestimmen:

(a) der Abstand zweier benachbarter Nullstellen ist t = 0,05 s

(b) f(0s) = 0.2 cm und f(0.0183s) = 0,6 cm

A3.3.12: In einem einphasigen symmetrischen Drehstromsystem fließen bei symmetrischer Belastung in jedem der drei Leiter gleich große, um $2\pi/3$ gegeneinander phasenverschobene Ströme. Wie groß ist der resultierende Strom?

Hinweis: Jeder der drei Ströme kann als harmonische Schwingung beschrieben werden.

A3.3.13: Zeichnen Sie den Graph der überlagerten Schwingung für einige andere Beispiele mit dem Computer.

A3.4.1:

(a) Für welches x ist $2^x = 1000$?

(b) Für welche x gilt $3^x < 10$?

(c) Für welche x gilt $0.7^x < 2$?

A3.4.2: Jede Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenzfunktion. Wählen Sie eine beliebige Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ und eine beliebige Potenzfunktion $g(x) = x^n$. Sie können dabei a nahe bei 1 und n sehr groß wählen. Zeichnen Sie beide Graphen und finden Sie anhand des Graphen heraus, wann die Exponentialfunktion die Potenzfunktion "überholt".

A3.4.3: Die mittlere Lebensdauer der Atome einer radioaktiven Substanz mit der Zerfallskonstante λ ist $1/\lambda$. Welcher Anteil der Atome zerfällt in dieser Zeitspanne?

A3.4.4: Bei einem Einschaltvorgang in einem Gleichstromkreis mit einem Ohmschen Widerstand R, einer Spule mit der Selbstinduktion L und der angelegten Spannung U ändert sich die Stromstärke mit der Zeit nach dem Gesetz: $i(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$. Nach welcher Zeit beträgt die Stromstärke $\frac{1}{2} \cdot \frac{U}{R}$?