

# 1 Quadratische Gleichungen

Für den Lösungsweg der kubischen Gleichung brauchen wir einige Kenntnisse über quadratische Funktionen. In diesem Abschnitt werden Lösungsformeln für Nullstellen quadratischer Gleichung hergeleitet. Diese Formeln dürften aus dem Schulunterricht Klasse 9/10 und aus dem Tafelwerk bekannt sein.

## 1.1 Mitternachtsformel

Die Mitternachtsformel ist die Lösungsmethode für quadratische Gleichungen schlecht hin. Jeder Schüler bekommt sie in der Schule zu hören und braucht sie im Mathematikunterricht bis zum Abitur. Ich will also nun erläutern wie man zu dieser einfachen Formel gelangt. Dazu betrachten wir allgemeine quadratische Gleichungen der Form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Bei dieser Darstellung stört es, dass zwei unterschiedliche Grade von  $x$  vorhanden sind. Eine Umformungsmethode besteht nun darin ein vollständiges Quadrat zu schaffen. Damit wird das  $x^2$  eliminiert, und man kann die Gleichung explizit nach  $x$  auflösen.

Der erste Umformungsschritt besteht darin die Gleichung mit  $4a$  zu multiplizieren:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \quad | \cdot 4a \\ 4a^2x^2 + 4abx &= -4ac \quad | + b^2 \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Gleichung mit  $\frac{1}{2}$  potenzieren und nach  $x$  umformen.

$$\begin{aligned} (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \quad | (\cdot)^{\frac{1}{2}} \\ 2ax + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad | - b \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \quad | : 2a \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Da beide Summanden den selben Nenner haben, können wir die Gleichung ein wenig vereinfachen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diese Gleichung findet man in diversen Tafelwerken und sie wird uns bei der Lösung von Nullstellen kubischer Gleichungen sehr hilfreich sein.

## 1.2 p - q - Formel

Auch diese Lösungsformel für Nullstellen quadratischer Gleichungen ist sehr bekannt. Sie lässt sich entweder aus der *Mitternachtsformel* oder durch die Normalform einer quadratischen Gleichung herleiten. Ich will hier beide Wege andeuten.

### 1.2.1 Herleitung über Normalform

Als Ausgangsgleichung gilt die Normalform einer quadratischen Funktion, die wir 0 setzen:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit} \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Auch hier führen wir eine quadratische Ergänzung durch, damit das  $x^2$  durch späteres Radizieren eliminiert wird:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 & | \cdot 4 \\ 4x^2 + 4px &= -4q & | + p^2 \\ 4x^2 + 4px + p^2 &= p^2 - 4q \\ (2x + p)^2 &= p^2 - 4q & | (\ )^{\frac{1}{2}} \\ 2x + p &= \pm \sqrt{p^2 - 4q} & | - p \\ 2x &= -p \pm \sqrt{p^2 - 4q} & | : 2 \\ x &= -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} \end{aligned}$$

Zum Schluss kann man noch die 4 im zweiten Summanden kürzen und man erhält die sogenannte **p - q - Formel**

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

### 1.2.2 Herleitung über Mitternachtsformel

Diese Methode für die Herleitung der *p - q - Formel* ist trivialer als die vorhergegangene. Bei der Mitternachtsformel gingen wir davon aus, dass das quadratische x-Glied einen Faktor  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$  besitzt. Bei der p - q - Formel wird allerdings vorausgesetzt, dass  $a = 1$  ist. Wir ersetzen daher  $a$  durch 1 in der Mitternachtsformel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Durch Ersetzen von  $b$  und  $c$  durch  $p$  und  $q$  erhalten wir unsere p - q - Formel:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Nun werde ich noch ein weiteres Verfahren erläutern, womit man die Nullstellen einer quadratischen Gleichung in der Normalform errechnen kann:

### 1.3 Satz von Vieta

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist jede algebraische Gleichung in Linearfaktoren aller Nullstellen zerlegbar. Dies trifft natürlich auch auf quadratische Gleichungen zu:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Als Nullstellen müssen hier auch jene aus dem komplexen Zahlenbereich  $\mathbb{C}$  gelten!

Multipliziert man nun die Linearfaktoren aus, erhält man folgende quadratische Funktion:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2 = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Normalform einer quadratischen Gleichung, so gilt für  $p$  und  $q$ :

$$\begin{aligned} -p &= x_1 + x_2 \\ q &= x_1x_2 \end{aligned}$$

**Satz von Vieta:** Die Zahlen  $x_1$  und  $x_2$  sind genau dann die Lösungen der Gleichung  $x^2 + px + q$ , wenn gilt:  $x_1 + x_2 = -p$  und  $x_1x_2 = q$ .

Dieser Satz ist zur Lösungsbestimmung bei trivialen Lösungen ganz gut geeignet, aber sobald keine ganzzahligen Lösungen existieren, ist er nicht empfehlenswert. Er kann aber zur Probe für Lösungen quadratischer Gleichungen benutzt werden.

### 1.4 Diskriminante der Lösungsformel

Die Diskriminante der Lösungsformel für allgemeine quadratische Gleichungen ist der unter der Wurzel stehende Ausdruck:

$$D = b^2 - 4ac$$

Die Diskriminante gibt Aufschluss über die mögliche Anzahl und Art der Lösungen. Folgende Möglichkeiten gibt es:

$$D > 0 \Rightarrow \text{Es gibt genau 2 reelle Nullstellen}$$

$$D = 0 \Rightarrow \text{Es gibt genau 1 reelle Nullstelle}$$

$$D < 0 \Rightarrow \text{Es gibt genau 2 imaginäre Nullstellen } (x \in \mathbb{C})$$