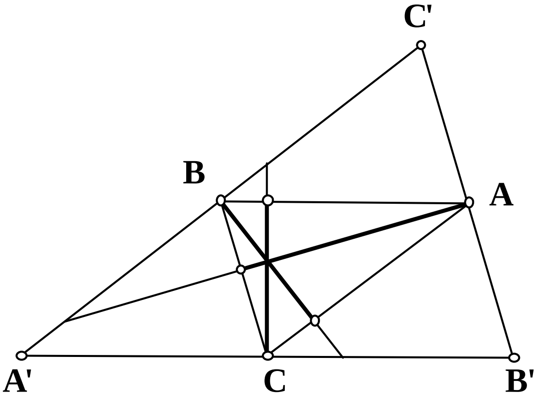

C'
B
A
A'
C
B'

Sei $\Delta ABC$ ein Dreieck. Dann nennt man die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ die **Winkelhalbierenden** des Dreiecks $\Delta ABC$.

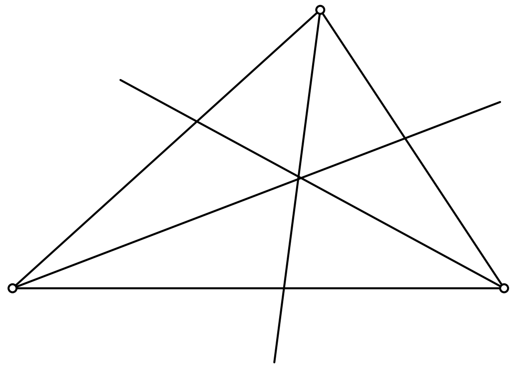


**Bild 2.X Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks**

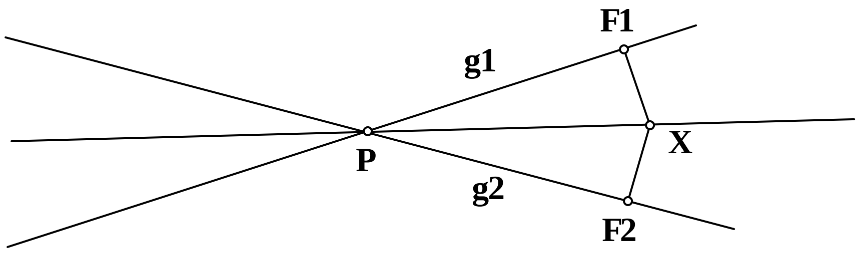
Sei $P$ ein Punkt außerhalb einer Geraden $g$. Der **Abstand** $d(P,g)$ von $P$ zu $g$ ist die Länge des Lots von $P$ auf $g$ (genauer gesagt: die Länge der Strecke $\overline{PF}$, wobei $F$ der Fußpunkt des Lots von $P$ auf $g$ ist). Der Abstand von $P$ zu $g$ ist die kürzeste Verbindung von $P$ zu einem Punkt von $g$.

**2.4.4 Hilfssatz.** *Seien* $g_1$ *und* $g_2$ *zwei Geraden, die sich in dem Punkt* $P$ *schneiden, und sei* $s$ *die Winkelhalbierende von* $g_1$ *und* $g_2$*. Dann sind die Punkte auf* $s$ *genau die Punkte, die den gleichen Abstand von* $g_1$ *wie von* $g_2$ *haben.*

*Beweis*. Wir müssen zwei Dinge zeigen: (1) Jeder Punkt auf $s$ hat den gleichen Abstand von $g_1$ wie von $g_2$. (2) Jeder Punkt, der den gleichen Abstand von $g_1$ wie von $g_2$ hat, liegt auf $s$.

(1) Sei $X$ ein Punkt auf $s$, o.B.d.A. $X \neq P$. Sei $F_1$ der Fußpunkt des Lots von $X$ auf $g_1$, und sei $F_2$ der Fußpunkt des Lots von $X$ auf $g_2$. Wir müssen zeigen, dass $|XF_1| = |XF_2|$ gilt.

Dann sind $\Delta PXF_1$ und $\Delta PXF_2$ rechtwinkligen Dreiecke, bei denen die Hypotenusen und ein weiteres Paar von Winkeln gleich groß sind. Dann sind diese Dreiecke kongruent (Übungsaufgabe).




Also ist insbesondere $|XF_1| = |XF_2|$.

(2) Sei jetzt umgekehrt $X$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass die Länge der Strecken $\overline{XF_1}$ und $\overline{XF_2}$ gleich ist; dabei ist $F_1$ der Fußpunkt des Lots von $X$ auf $g_1$ und $F_2$ der Fußpunkt des Lots von $X$ auf $g_2$. Dann sind $\Delta SXF_1$ und $\Delta SXF_2$ zwei rechtwinklige Dreiecke, bei denen die Hypotenusen und ein Paar von Katheten gleich lang sind. Es folgt (Siehe Übungsaufgabe), dass diese Dreiecke kongruent sind.

Insbesondere sind dann die Winkel $\angle XSF_1$ und $\angle XSF_2$ gleich groß. Das bedeutet, dass $s = XP$ die Winkelhalbierende ist. □

**2.4.5 Satz.** *In jedem Dreieck schneiden sich die Winkelhalbierenden in einem gemeinsamen Punkt. Dieser Punkt hat von allen Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand.*

*Beweis*. Sei $\Delta ABC$ ein Dreieck. Seien $w_a$ die Winkelhalbierende von $\angle A$, $w_b$ die Winkelhalbierende von $\angle B$ und $w_g$ die Winkelhalbierende von $\angle C$.

Hilfssatz 2.4.4 sagt: Der Schnittpunkt $S$ von $w_a$ und $w_b$ hat den gleichen Abstand von $AC$, $AB$ und $BC$. Insbesondere hat er den gleichen Abstand von $AC$ und $BC$. Wiederum nach Hilfssatz 2.4.4 liegt $S$ also auf der Winkelhalbierenden $w_g$ durch $C$.

Also schneiden sich alle Winkelhalbierenden in dem gemeinsamen Punkt $S$. □

Sei $\Delta ABC$ ein Dreieck. Man nennt die Verbindungsstrecken einer Ecke mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite die **Seitenhalbierenden** von $\Delta ABC$.

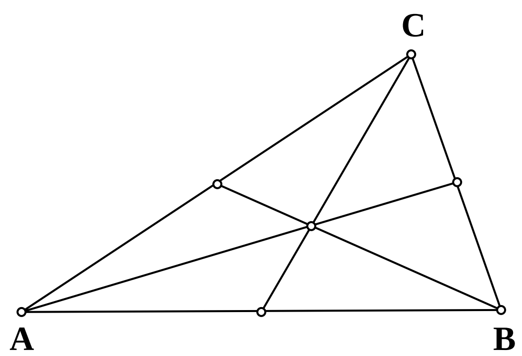



**Bild 2.X Seitenhalbierende eines Dreiecks**

Seien $g_1$ und $g_2$ zwei verschiedene parallele Geraden. Dann ist für jeden Punkt $P_1$ auf $g_1$ der Abstand zum Fußpunkt des Lots von $P_1$ auf $g_2$ gleich groß. (Dies ist eine Tatsache, die wir hier nicht beweisen!) Diese Zahl nennt man den **Abstand** von $g_1$ und $g_2$.