Lineare Algebra I
für M, LaG, LaB, Inf, WInf WS 2002/2003

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Norbert Schappacher
Birgit Petri, Maren Riemenschneider, Nicole Roth
November 7, 2002

2.Übungsblatt - Lösungen

Minitest

T4 Sei A eine dreielementige und B eine zweielementige Menge. Das Produkt $A \times B$ hat dann

[ ] 5 Elemente,

[x] 6 Elemente,

[ ] 3 Elemente.

T5 Existieren Funktionen der folgenden Art?

[ ] $\mathbb{Z} \to \emptyset$,

[x] $\emptyset \to \emptyset$,

[x] $\emptyset \to \mathbb{Z}$.

T6 Welche der folgenden Funktionen sind gleich der Funktion $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n+1$?

[x] $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, n \mapsto 2(n+1)-1$,

[ ] $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n+1$,

[ ] $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, n \mapsto 2n+1$.

Gruppenübungen

G4 a) $B \times A = \{(\text{gelb}, \text{Teller}), (\text{gelb}, \text{Tasse}), (\text{gelb}, \text{Glas}), (\text{rot}, \text{Teller}), (\text{rot}, \text{Tasse}), (\text{rot}, \text{Glas})\}$.
Die Menge $B \times A \times \emptyset$ hat 0, d.h. keine Elemente.

b) $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$

G5 a) Keine Funktion, da mehrere Studierende das gleiche Alter haben.

b) Ist eine Funktion, aber nicht injektiv, da mehrere Studierende das gleiche Alter haben. Nicht surjektiv, da z.B. niemand 1 Jahr alt ist. Insbesondere also nicht bijektiv.

c) Keine Funktion, da die Zuordnung $x \mapsto x-1$ für $x=1$ nicht wohldefiniert ist (Ergebnis liegt nicht im Bildbereich).

d) Ist eine injektive, aber nicht surjektive Funktion, da 1 kein Urbild hat. Damit auch nicht bijektiv.

e) Eine Funktion, die injektiv, surjektiv und bijektiv ist.

G6 a) Wir betrachten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) \quad &\iff \quad (\exists x \in M)\ (x \in A \cup B) \wedge f(x) = y \\
&\iff \quad (\exists x \in M)\ (x \in A \vee x \in B) \wedge f(x) = y \\
&\iff \quad (\exists x \in M)\ (x \in A \wedge f(x) = y) \vee (x \in B \wedge f(x) = y) \\
&\iff \quad ((\exists x \in M)\ (x \in A \wedge f(x) = y)) \vee ((\exists x \in M)\ (x \in B \wedge f(x) = y)) \\
&\iff \quad y \in f(A) \cup f(B).
\end{aligned}$$

Damit sind die Mengen $f(A \cup B)$ und $f(A) \cup f(B)$ gleich.

b) Wir betrachten die folgenden Implikationen:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow (\exists x \in M)\ (x \in A \cap B) \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow (\exists x \in M)\ x \in A \wedge x \in B \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow ((\exists x \in M)\ x \in A \wedge f(x) = y) \wedge ((\exists x \in M)\ x \in B \wedge f(x) = y) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

Also umfaßt die Menge $f(A) \cap f(B)$ die Menge $f(A \cap B)$. (Außer dem dritten Pfeil sind übrigens alle sogar Äquivalenzen.) Nun betrachten wir die eindeutig bestimmte Funktion $f : \{0,1\} \to \{0\}$. Es ist

$$f(\{0\}) \cap f(\{1\}) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \neq \emptyset = f(\emptyset) = f(\{0\} \cap \{1\}).$$

c) Betrachte die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} y \in f(A) \setminus f(B) &\Rightarrow ((\exists x \in M)\ x \in A \wedge f(x) = y) \wedge \neg((\exists x \in M)\ x \in B \wedge f(x) = y) \\ &\Rightarrow ((\exists x \in M)\ x \in A \wedge f(x) = y) \wedge ((\forall x \in M)\ x \notin B \vee f(x) \neq y) \\ &\Rightarrow ((\exists x \in M)\ x \in A \wedge f(x) = y) \wedge ((\forall x \in M)\ f(x) = y \Rightarrow x \notin B) \\ &\Rightarrow (\exists x \in M)\ x \in A \wedge f(x) = y \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow (\exists x \in M)\ (x \in A \setminus B) \wedge f(x) = y \\ &\Rightarrow y \in f(A \setminus B). \end{aligned}$$