

# Analysis I

## Blatt 13

WS 2003/04

V. Wrobel

### Aufgabe 53

Zwar sind endliche Produkte abzählbarer Mengen wieder abzählbar, aber für unendliche Produkte abzählbarer Mengen muß das nicht gelten. Geben Sie ein Beispiel an!

### Aufgabe 54

Sei  $1 < a =: x_1$  und die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv definiert durch  $x_{n+1} := \frac{a(1+x_n)}{a+x_n}$ . Zeigen Sie, daß die Folge gegen  $\sqrt{a}$  konvergiert.

(Hinweis: Probieren Sie es mit dem Monotoniekriterium!)

### Aufgabe 55

Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetige (gleichmäßig stetige) Funktionen. Zeigen Sie, daß die Funktionen  $x \mapsto \max\{f, g\}(x) := \max\{f(x), g(x)\}$  und  $x \mapsto \min\{f, g\}(x) := \min\{f(x), g(x)\}$  stetige (gleichmäßig stetige) Funktionen auf  $X$  sind.

(Hinweis: Für  $a, b \in \mathbb{R}$  ist  $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$ .)

### Aufgabe 56

Nennen wir eine Funktion  $f : X \rightarrow Y$  CAUCHY-Folgen-treu, wenn sie CAUCHY-Folgen in CAUCHY-Folgen überführt, so sind gleichmäßig stetige Funktionen CAUCHY-Folgen-treu. Sei  $A \subset X$ .

- Jede CAUCHY-Folgen-treue Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist stetig, aber nicht jede stetige Funktion automatisch CAUCHY-Folgen-treu.  
(Hinweis: Betten Sie  $Y$  in die Vervollständigung ein!)
- Finden Sie eine CAUCHY-Folgen-treue, nicht gleichmäßig stetige Funktion zwischen metrischen Räumen  $X$  und  $Y$  Ihrer Wahl.
- Jede CAUCHY-Folgen-treue Funktion  $g : A \rightarrow Y$  läßt sich stetig auf den Abschluß  $\bar{A}$  fortsetzen, wenn  $Y$  vollständig ist.
- Sind  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  CAUCHY-Folgen-treu, so auch  $g \circ f$ .
- Sind  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  CAUCHY-Folgen-treu, so auch die Produktfunktion  $x \mapsto f(x)g(x)$ . Das Produkt gleichmäßig stetiger Funktionen ist dagegen im allgemeinen nicht gleichmäßig stetig.

**Abgabe:** Freitag, 6. Februar 2004, 11 Uhr im Schrein.