$\mathbb{R}$ besitzt als $\mathbb{Q}-$ Vektorraum keine abzählbare Basis

Lemma:

Sei K ein Körper, V ein Vektorraum über K und B eine Basis von V. Ist $V \neq \{0\}$ und ist K oder B eine unendliche Menge. so gilt:

$$|V| = \max\{|K|, |B|\}$$

Beweis:

$\leq$

Sicher ist $|B| \leq |V|$
Wähle $0 \neq X \in B$. Für $a, b \in K$ mit $a \neq b$ ist $aX \neq bX$ da $X \neq 0$. damit ist

$$|K| = |\{aX|a \in K\}| = |<X>| \leq |V|$$

und es folgt

$$\max\{|K|, |B|\} \leq |V|\}$$

$\geq$

Sei $i \in \underline{k}\rfloor$ und $Y \in V\backslash\{0\}$ mit

$$Y = \sum_{i \in \underline{k}\rfloor} \lambda_i X_i$$

für $X_i \in B$ und passende $\lambda_i \in K$.

Definiere die Abbildung $\varphi : V \to \mathcal{P}_{fin}(K \times B)$[1]

$$\varphi(Y) \begin{cases} \{(\lambda_i, X_i) \in K \times B | \forall \lambda_i \in K, X_i \in B : Y = \sum_{i \in \underline{k}\rfloor} \lambda_i X_i\} & Y \neq 0 \\ \emptyset & Y = 0 \end{cases}$$

φ ist injektiv und da $K \times B$ eine unendliche Menge ist gilt:

$$|\mathcal{P}_{fin}(K \times B)| = |K \times B| = \max\{|K|, |B|\}$$

[2] Es folgt:

$$\max\{|K|, |B|\} \geq |V|$$

[1] $\mathcal{P}_{fin}(K \times B) := \{S \subseteq K \times B | S$ endlich$\}$ Das fin steht also für finit (engl. endlich

[2] dieses Resultat über unendliche Mengen ist keinesfalls trivial und müsste eigentlich noch bewiesen werden...

Satz:

Der Vektoraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ besitzt keine abzählbare Basis

Beweis:

Es ist $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0 < |\mathbb{R}|$.
Annahme: B wäre eine Basis von $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ mit $|B| \leq |\mathbb{N}|$. So wäre nach dem Lemma

$$|\mathbb{R}| = \max\{|\mathbb{Q}|, |B|\} = \aleph_0$$

Wiederspruch da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.