Universität Hannover **4.11.2003**
Institut für Mathematik
Prof. Dr. E. Schrohe, Dr. V. Kasten

Lösungen zum 2. Übungsblatt ANALYSIS I

Lösung Aufgabe 5:
a) Seien $a \in A,\ b \in B$. Dann ist $a \leq$sup A und $b \leq$sup B, also $a + b \leq$ sup $A+$ sup B. Dies zeigt, dass $s :=$ sup $A+$ sup B eine obere Schranke zu $A+B$ ist. Eine kleinere obere Schranke als s kann es nicht geben, denn: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $a \in A$ mit $a >$ sup $A - \varepsilon$ und auch ein $b \in B$ mit $b >$ sup $B - \varepsilon$. Dann ist $a + b > s - 2\varepsilon$. Weil dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, kann es keine kleinere Schranke als s geben !

b) Ein Gegenbeispiel liefern z.B. die Intervalle $A = [-2, -1],\ B = [1, 2]$. Damit wird $A \cdot B = [-4, -1]$, also sup $A \cdot B = -1 \neq$ sup $A\cdot$ sup $B = (-1) \cdot 2 = -2$.

c) Wegen $A < B$ (nichtleer !) ist jedes $b \in B$ eine obere Schranke zu A. Also existiert $s :=$ sup A (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$). Beh.: Für diese Zahl s gilt $a \leq s \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.
Beweis: $a \leq s$ ist klar nach Definition von s. Zu zeigen bleibt nur noch $s \leq b$ für alle $b \in B$. Angenommen, es gäbe ein $b \in B$ mit $b < s =$ sup A. Nach Definition des Supremums muss es dann ein $a \in A$ geben mit $b < a$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung $A < B$!

Lösung Aufgabe 6:
a) Beweis indirekt: Angenommen, es gäbe eine obere Schranke zu $\mathbb{N}$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert dann die reelle Zahl sup $\mathbb{N}$. Nach Definition eines Supremums gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit sup $\mathbb{N} - 1 < n$. Dann wäre aber sup $\mathbb{N} < n + 1 \in \mathbb{N}$, was nicht geht. Widerspruch !

b) inf $M = 0$: Wegen $m \geq 1,\ m^2 + n^2 \geq 0$ ist 0 eine untere Schranke für M. Eine größere untere Schranke kann es nicht geben: Sonst gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $\frac{1}{1+n^2} \geq \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N})$ (man beachte, dass diese Brüche alle zu M gehören). Dann wäre wegen $1/\varepsilon \geq 1 + n^2 \geq 1 + n$ die Menge $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt, was aber nach Teil a) nicht der Fall ist. Also ist 0 die größte untere Schranke (das Infimum). Weil dieses Infimum nicht zur Menge gehört, existiert min M nicht.

sup $M =$ max $M = \frac{1}{2}$: Wegen $0 \leq (m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$ ist $m^2 + n^2 \geq 2mn \geq 2m$, also gilt stets $\dfrac{m}{m^2 + n^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Diese obere Schranke zu M wird für $m = n = 1$ sogar angenommen.
Damit ist sup $M =$ max $M = \frac{1}{2}$.

Lösung Aufgabe 7:

a) $n = 1$: 133 teilt offensichtlich die Zahl $11^2 + 12^1 (= 133)$.

Ind. Schluss: Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ sei 133 ein Teiler von $11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Dann teilt 133 auch die Zahl $11^{n+2} + 12^{2n+1}$, denn man rechnet nach:
$11^{n+2}+12^{2n+1} = 11\cdot 11^{n+1}+144\cdot 12^{2n-1} = 11\cdot 11^{n+1}+(133+11)\cdot 12^{2n-1} = 11(11^{n+1}+12^{2n-1})+133\cdot 12^{2n-1}$.
An dieser Form erkennt man mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung, dass 133 auch $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ teilt.

b) $n = 0$: $\dfrac{a^1 - b^1}{a - b} = 1 = a^0 b^0$. Also stimmt's.

Ind.Schluss: Es gelte $\dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen ist: Dann gilt auch $\dfrac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b}=\sum\limits_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k}$.
Man rechnet unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung (beim zweiten Gleichheitszeichen) nach:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k} = b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} + a^{n+1}b^0 = b\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} + a^{n+1} = \frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b}.$$

Lösung Zusatzaufgabe 8:

Für $n=1$ lautet die Behauptung $2! < 2^2(1!)^2$, und das ist offenbar richtig.

Ind. Schluss: Angenommen, es gelte $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ für irgendein $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist: Dann gilt auch $(2n+2)! < 2^{2n+2}((n+1)!)^2$. Dies folgt so:

$(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2(2n+2)(2n+2) = 2^{2n+2}(n!)^2(n+1)^2 = 2^{2n+2}((n+1)!)^2$.

Dabei wurde (beim Ungleichheitszeichen) die Induktionsvoraussetzung hineingesteckt.