

Folge aus Häufungspunkten

Sei (a_n) eine Folge mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ und

x Häufungspunkt $\Leftrightarrow x = a_n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

Der Einfachheit halber setze man zunächst $A := \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

1) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ und eine Umgebung U von x , sodass $A \cap U = \emptyset$.

Beweis: Angenommen in jeder Umgebung U von einem beliebigen $x \in \mathbb{R}$ liegt ein Folgenglied a_n . Da a_n Häufungspunkt ist, liegen dann aber auch unendlich viele Folgenglieder in U . Damit wäre jedes $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt der Folge (a_n) . Das ist ein Widerspruch dazu, dass die Menge der Häufungspunkte abzählbar ist.

Die Umgebung aus 1) kann man noch genauer angeben.

2) Sei $x \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass eine Umgebung U von x existiert mit $A \cap U = \emptyset$. Sei weiter $u := \inf\{r \mid (r, x) \cap A = \emptyset\}$ und $v := \sup\{r \mid (x, r) \cap A = \emptyset\}$. Hierbei sei zugelassen, dass $u, v \in \{-\infty, \infty\}$. Dann gilt $u \in \mathbb{R} \Rightarrow u \in A$ und $v \in \mathbb{R} \Rightarrow v \in A$.

Beweis: Es reicht nur den Fall $v \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Der andere Fall geht analog. Nach Definition von v liegt in jeder Umgebung von v ein Folgenglied. Damit liegen in jeder Umgebung sogar unendlich viele. Also ist v ein Häufungspunkt von (a_n) , also $v \in A$.

Es ist klar, dass mindestens einer der Werte u oder v eine reelle Zahl sein muss. Wir können deshalb o.E. annehmen, dass $v \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir wissen nun, dass in einer ausreichend kleinen Umgebung von v kein Element aus A links von v liegt und unendlich viele rechts davon. Damit kann man genauso vorgehen wie zuvor. Man sucht sich also einen Wert $t \in (v, \infty)$ und eine zugehörige Umgebung V , sodass $V \cap A = \emptyset$ gilt (Die Existenz folgt wie bei 1)). Nun muss es wie bei 2) ein größtes $w \in A$ geben, sodass in einer genügend kleinen Umgebung von w kein Element aus A rechts von w liegt.

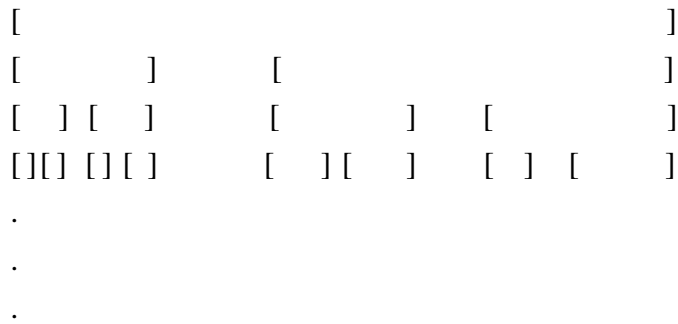
Jetzt hat man also ein Intervall $[v, w]$ gefunden, dass folgende Eigenschaften hat:

i) $v, w \in A$

ii) Unmittelbar links von v und unmittelbar rechts von w liegen keine Folgenglieder.

Nun kann man analog weitermachen. Man „schneidet“ wieder ein Stück aus dem Inneren von $[v, w]$ raus und erhält zwei neue Intervalle $[v, s]$ und $[t, w]$, die beide die gleichen Eigenschaften haben wie $[v, w]$ (Die Existenz diese „Ausschnitte“ folgt immer wie in 1) daraus, dass jedes echte Intervall überabzählbar ist).

Nach dem gleichen Schema fährt man fort. Man hat dann eine Unterteilung die in etwa so aussieht:



(Die Intervallenden liegen nicht ganz untereinander, ich hoffe man versteht was gemeint ist.)

Nun betrachte man Folgen (x_n) von Intervallen, die man wie folgt konstruiert:

Sei $x_0 = [v, w]$. Dann soll $x_1 = [v, s]$ oder $x_1 = [t, w]$ sein. Danach wählt man für x_2 analog ein Teilintervall von x_1 usw. In der Skizze bedeutet das folgendes:

Man fängt beim obersten Intervall an. Danach nimmt man das linke oder das rechte in der zweiten Zeile. Dann schaut man unter dem genommenen Intervall nach und nimmt wieder links oder rechts usw.

Es gilt also $x_0 \supseteq x_1 \supseteq \dots$. Damit konvergiert die Folge (x_n) , denn die linken Eckpunkte sind monoton wachsend und beschränkt und die rechten monoton fallend und beschränkt.

Es ist weiter klar, dass zwei verschiedene Folgen gegen verschiedene Intervalle (echt oder unecht) konvergieren. Sei nun M die Menge aller Intervalle, gegen die eine der obigen Folgen (x_n) konvergiert. Setze nun $N := \{(b_n) \mid b_n \in \{0, 1\}\}$. Man kann nun recht trivial eine Bijektion von N auf M definieren, denn man kann die 0 mit links und die 1 mit rechts identifizieren. Und so erhalten wir ja gerade unsere Intervalle in M . Man entscheidet sich immer der Reihe nach für links oder rechts (0 oder 1).

Also sind die Mengen M und N gleichmächtig.

Damit ist man schon fast am Ziel. Sei $[a, b]$ ein Intervall aus M ($a = b$ soll hier zugelassen sein). Dann ist a ein Folgenglied.

Beweis: $[a, b]$ soll der Grenzwert der Folge $([c_n, d_n])$ sein. Wir wissen, dass $c_n \in A$ für alle natürlichen Zahlen n gilt. Nun liegt aber in jeder Umgebung von a ein c_n . In jeder Umgebung von c_n liegen aber unendlich viele Elemente aus A . Damit liegen auch in jeder Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder. Damit ist a Häufungspunkt von A und damit selbst in A . Damit kann man M injektiv abbilden auf A : Jedes Intervall aus M wird abgebildet auf seinen linken Eckpunkt (sofern dieser existiert, sonst wird abgebildet auf den einzigen Punkt, aus dem das Intervall besteht). Damit ist M höchstens gleichmächtig zu A . Insbesondere ist M aber überabzählbar, weil N überabzählbar ist. Damit kann also A nicht abzählbar sein. Widerspruch zur Annahmen, dass A nur aus Folgliedern besteht.

Also existiert keine Folge, die genau aus ihren Häufungspunkten besteht.