Analysis I
Blatt 10

WS 2003/04 V. Wrobel

Im folgenden seien (X, d_X) und (Y, d_Y) stets metrische Räume.

Aufgabe 40

Seien $X \times Y$ ausgestattet mit der Produktmetrik, $M \subseteq X \times Y$ und $(x_0, y_0) \in M$. Zeigen Sie, daß $(x_o, y_o) \in \operatorname{int}(M)$ genau dann, wenn es Umgebungen U von x_0 in X und V von y_0 in Y gibt mit $U \times V \subseteq M$. Insbesondere ist eine Menge M der Form $M = A \times B$ genau dann offen in $X \times Y$, wenn A offen in X und B offen in Y ist.

Aufgabe 41

Zeigen Sie, daß die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, \infty[$ gleichmäßig, aber nicht LIPSCHITZ-stetig ist.

Aufgabe 42

Seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Mengen und gelte $A \cap B = \emptyset$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{d_X(x, A)}{d_X(x, A) + d_X(x, B)}$$

auf X stetig ist und es daher eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit der bemerkenswerten Eigenschaft gibt, daß $f\Big|_A = 0$ und $f\Big|_B = 1$ und $\operatorname{Bild}(f) \subset [0, 1]$ gilt.
(Hinweis: Beweisen Sie oder erinnern Sie sich daran, daß $x \mapsto d_X(x, A)$ sogar LIPSCHITZ-stetig ist!)

Aufgabe 43

Hier ist das Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der bemerkenswerten Eigenschaft, daß die Restriktion $f\Big|_L$ auf jeden eindimensionalen Teilraum $L \subset \mathbb{R}^2$ stetig ist, daß f aber jede offene Umgebung von $(0, 0)$ auf eine unbeschränkte Menge wirft, insbesondere in $(0, 0)$ nicht stetig ist:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + y^2} & \text{für } \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Natürlich ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig!
Rechnen Sie die behaupteten Eigenschaften für f nach.

Abgabe: Freitag, 16. Januar 1998, 11 Uhr im Schrein.