Übungen
Lineare Algebra I
WS 2003/04

Serie 5 **Bender**

18.11.2003

1. Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq n \leq p-1$.
   Zeige: $\binom{p}{n}$ ist durch p teilbar.
2. Für eine Permutation α einer Menge M definiere $F(\alpha) := \{x \in M | x\alpha = x\}$.
   Nenne α eine Transposition, wenn $|M \setminus F(\alpha)| = 2$.
   Zeige: Jede Permutation α einer endlichen Menge ist ein Produkt von Transpositionen.
   (Mit anderen Worten: in einer Bibliothek läßt sich jede beliebige Unordnung durch sukzessive Vertauschung von zwei Büchern herstellen.)
3. Bestimme die Lösungen (in $\mathbb{R}$) des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, M eine Menge mit $|M| = m$ und
   $a(m,n) := |\{f \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{N}_0) | \sum_{x \in M} xf \leq n\}|$ sowie
   $b(m,n) := |\{f \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{N}_0) | \sum_{x \in M} xf = n\}|$.
   Zeige: $a(m,n) = \binom{m+n}{m}$ und $b(m,n) = \binom{n+m-1}{m-1}$.
5. * Der Stadtrat von Schilda stellt fest, daß je m Junggesellen der Stadt zusammengenommen mindestens m (unverheiratete) Freundinnen haben, $m = 1, 2, 3, ...$, und beschließt, sämtliche Junggesellen der Stadt so zu verheiraten, daß jeder mit einer seiner Freundinnen verheiratet wird.

   Läßt sich dieser Beschluß durchführen?

Abgabe: Mittwoch, den 26. November bis 12^{00} im Schrein.

---

*G.Scheja, U.Storch, *Lehrbuch der Algebra*