Übungen
Lineare Algebra I
WS 2003/04

Serie 2 | **Bender**

28.10.2003

1. Seien A, B, C, X Mengen, $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ und $X \subseteq C$.
   Zeige: $(\alpha\beta)^{-1}(X) = \alpha^{-1}(\beta^{-1}(X))$.

2. Sei $\alpha : A \to B$ bijektiv. Zeige, daß die Abbildung

$$\phi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \quad X \mapsto X\alpha$$

   ebenfalls bijektiv ist.

3. Untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität:

   (a) $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad n \mapsto \frac{n}{n+1}$,
   (b) $\varphi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad (n, m) \mapsto 2^{n-1}(2m-1)$.

4. Sei $w \in \mathbb{R}$ mit $w^3 = 2$. Gibt es $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $1 + xw + yw^2 = 0$?

5. (für Arbeitswütige)
   Zeige in 4., daß das Inverse r^{-1} einer Zahl $r = a + bw + cw^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ sich ebenfalls in dieser Form schreiben läßt.
   Versuche dieses Problem auch so umzuformulieren, daß es auf die Surjektivität einer gewissen (injektiven) Abbildung hinausläuft.

Abgabe: Mittwoch, den 5. November bis 12^{00} im Schrein.