Musterlösung zu Blatt 1

Analysis II für Sek II, SS 2003

1 Im folgenden werden sämtliche Reihen als $\sum a_k$ mit passenden Grenzen für k geschrieben.

a) Das Wurzelkriterium liefert

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{2^k}} = \frac{\sqrt[k]{k+1}}{2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

denn es gilt:

$$1 \underset{k\to\infty}{\longleftarrow} \sqrt[k]{k} \le \sqrt[k]{k+1} \le \sqrt[k]{2k} = \sqrt[k]{2}\cdot\sqrt[k]{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Also konvergiert die Reihe (absolut).

b) Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Also divergiert die Reihe, da eine divergente Minorante existiert.

c) Das Quotientenkriterium liefert:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{((k+1)!)^2/(2k+2)!}{(k!)^2/(2k)!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{(1+\frac{1}{k})^2}{(2+\frac{2}{k})(2+\frac{1}{k})} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

Also konvergiert die Reihe (absolut).

d) Es gilt $(\log k)^3 \le k$ ab einem k_0, denn es ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{(\log k)^3} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{k}{3(\log k)^2} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{k}{6\log k} \overset{(l'H.)}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{k}{6} = \infty$$

nach der Regel von de l' Hospital. Damit folgt:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^3} \ge \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Also divergiert die Reihe, da eine divergente Minorante existiert.

e) Das Leibnizkriterium liefert die Konvergenz der Reihe, da die Logarithmusfunktion monoton steigend und daher die Funktion $k \mapsto \frac{1}{\log k}$ monoton fallend ist. (Wegen $\log k \le k$ und somit $\frac{1}{\log k} \ge \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe aber nicht absolut, da sie eine divergente Minorante besitzt.)

f) Da $\sqrt[k]{k} \to 1$ für $k \to \infty$, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\sqrt[k]{k} \le 2$ für alle $k \ge k_0$, und es folgt

$$\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k\cdot\sqrt[k]{k}} \ge \frac{1}{2k} \quad \text{für alle } k \ge k_0.$$

Also gilt

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} \ge \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{2k} = \infty,$$

d.h. die Reihe divergiert, da eine divergente Minorante existiert.

2 a) Da die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ absolut konvergiert mit Grenzwert $\frac{1}{1-q}$, folgt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^{k+1}} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}} = 1$$

Also konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ (absolut).

b) **1. Fall:** $|x| < 1$

Verkleinern des Nenners durch $1 + x^{4k} \geq 1$ liefert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1+x^{4k}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^2\right)^k = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{(geometrische Reihe)}$$

Also konvergiert die Reihe (absolut), da eine konvergente Majorante existiert.

2. Fall: $|x| = 1$

Es folgt unmittelbar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1+x^{4k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Also divergiert die Reihe.

3. Fall: $|x| > 1$

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1+x^{4k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^{2k}} + x^{2k}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x^{-2}\right)^k = \frac{1}{1-x^{-2}}$$

(In der letzten Gleichung wird die Formel für die geometrische Reihe benutzt, wobei $|x^{-2}| < 1$.) Also konvergiert die Reihe (absolut), da eine konvergente Majorante existiert.

3 Es gilt:

$$a_n = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Somit sind -1 und 3 offensichtlich die einzigen Häufungswerte, und es folgt:

$$\liminf a_n = -1 \qquad \text{und} \qquad \limsup a_n = 3$$

4 Ist $\limsup(a_n + b_n) = c$, so existieren Teilfolgen (a_{n_j}) und (b_{n_j}) mit $a_{n_j} \to a$ und $b_{n_j} \to b$ für $j \to \infty$ und $a + b = c$. Dann gilt

$$a \leq \limsup a_n \qquad \text{und} \qquad b \leq \limsup b_n$$

und somit die Behauptung:

$$\limsup(a_n + b_n) = c = a + b \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

Ein Beispiel, wo tatsächlich „<“ auftritt, ist gegeben durch die Folgen (a_n), (b_n) mit $a_n := (-1)^n$ und $b_n := (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

5 i) Behauptung: $\limsup \sqrt[k]{a_k} \;\leq\; \limsup \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$

Beweis: Es sei $s := \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k}$. Dann gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, k \geq k_0 : \; \frac{a_k}{a_{k-1}} \leq s + \varepsilon$$

Desweiteren existiert ein $M > 0$, so daß

$$a_{k_0} \;\leq\; M(s+\varepsilon)^{k_0}$$

ist. Aus

$$a_k \;=\; \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \cdot a_{k_0}$$

folgt damit:

$$a_k \;\leq\; (s+\varepsilon)^{k-k_0} \cdot M(s+\varepsilon)^{k_0} \;=\; M(s+\varepsilon)^k$$

Wurzelziehen liefert

$$\sqrt[k]{a_k} \;\leq\; \sqrt[k]{M}(s+\varepsilon) \;\rightarrow\; s+\varepsilon$$

für $k \to \infty$, und es folgt die Behauptung.

ii) Behauptung: $\liminf \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \;\leq\; \liminf \sqrt[k]{a_k}$

Analog zu Teil i).

iii) Behauptung: $\liminf \sqrt[k]{a_k} \;\leq\; \limsup \sqrt[k]{a_k}$

Gilt nach Definition der Limiten.

Aus den Teilen i) - iii) ergibt sich die behauptete Ungleichungskette.

Es folgt, daß der Anwendungsbereich des Wurzelkriteriums größer ist als der des Quotientenkriteriums, denn wenn das Quotientenkriterium erfüllt ist, so ist auch das Wurzelkriterium erfüllt, im allgemeinen aber nicht umgekehrt.

sawo