$(x+h)^n = (x+h)(x+h)\cdot\ldots\cdot(x+h)$ (n Faktoren)
Wir wollen dieses Produkt (wenigstens teilweise) in eine Summe verwandeln.
Zumindest kann man schon erkennen, dass beim Umwandeln des Produkts ein Summand x^n vorkommt, wenn man nämlich alle x miteinander multipliziert.
Nehmen wir jetzt aus einer Klammer ein h und aus den restlichen ein x. Wie heißt das Ergebnis dieses Produkts? Na klar: $h\cdot x^{n-1}$. Wie viele solche Produkte erhält man? Nun, man kann das h ja aus jeder der n Klammern wählen und die x aus den restlichen Klammern. Insgesamt erhalten wir also $n\cdot h\cdot x^{n-1}$
Bei der weiteren Umwandlung muss man jetzt aus 2 oder noch mehr Klammern ein h wählen, aus den restlichen das x. Das bedeutet aber, dass alle verbleibenden Produkte den Faktor h^2 enthalten. Was sonst noch darin vorkommt, ist uns hier egal – wir nennen es einfach r (für Rest).
Damit können wir diesen Term schreiben:

$$(x+h)^n = (x+h)\cdot\ldots\cdot(x+h) = x^n + n\cdot h\cdot x^{n-1} + h^2\cdot r$$

Setzen wir jetzt das Ganze in den Differenzenquotienten ein:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + n\cdot h\cdot x^{n-1} + h^2\cdot r - x^n}{h} = \frac{n\cdot h\cdot x^{n-1} + h^2\cdot r}{h} = n\cdot x^{n-1} + h\cdot r$$

Dabei haben wir einmal x^n „wegsubtrahiert" und einmal durch h gekürzt. Das war möglich, weil alle Summanden im Zähler ein h als Faktor enthielten.
Wenn du jetzt den Grenzwert für h gegen 0 bildest, fällt der Ausdruck hr komplett weg, weil h gegen 0 geht und r eine endliche – wenn auch uns unbekannte – Zahl darstellt.
Also:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + hr) = nx^{n-1}$$